מושגי יסוד באלגברה לפי קומוטטיבית
חומר למבחן

המבחן יכלה מהתרגילים שהיו (אפשר להתעלם משאלות 2,5 של תרגיל 9, ושאלה 1 של תרגיל 12) וגלגות ומושגים שנלמדו בכיתה. לנוחיותכם אני אפרט את המושגים:

I. חוגים ומודולים

1) מושגים בסיסיים: חוג, אידאל, מודול, סכום ישר, מכפלה ישרה, מכפלה טנזורית, מודול נאמן, מודול פשוט...
2) תנאים שקולים של מודול פשוט
3) למה של Schur + מסקנה
4) סידרת הרכב, מודול מאורך סופי, משפט Jordan-Holder

II חוגים ומודולים פשוטים למחצה (פ"ל)

1) תכונות של מודולים פ"ל: סכום של מודולים פ"ל הוא פ"ל, תת-מודול של מודול פ"ל הוא מחובר ישר
2) 3 תנאים שקולים לחוג פשוט למחצה
3) משפט המבנה של חוגים פשוטים למחצה (משפט Wedderburn) + מסקנות
4) משפט המבנה של חוגים פשוטים ארטיניים (5 תנאים שקולים)
5) מסקנות: משפט Burnside, $R \otimes_k R^{op} \simeq Mat$

III רדיקל Jacobson

1) הגדרה ותכונות בסיסיות: $J(R)=\cap Ann(M)$, $\forall a\ 1-ax\in R^{\times} \Leftrightarrow x\in J(R)$
2) אם R ארטיני אז $J(R)$ נילפוטנטי
3) R פשוט למחצה אמ"מ R ארטיני ו-$J(R)=0$
4) משפט Hopkins: אם R חוג ארטיני אז R חוג נתרי.
5) למות נק"מ ומסקנותיה.

IV אלגברות פשוטות מרכזיות (פ"מ)

1) אם R פ"מ מעל K ו S פשוטה אז $R\otimes_K S$ פשוטה מרכזית מעל $Z(S)$ + מקרים בפרט"מ

2) מסקנות: אם S פ"מ מ"מ מעל K אזי $\dim_K S$ - רבוע
$S\otimes_K S^{op} = Mat.$ 1

3) משפט סקולם-נתר (Skolem-Noether)

4) משפט המרכז + מסקנות, כל תת-שדה מקסימלי $L\subset D$ הוא שדה פיצול

5) כל אלגברת חילוק סופית היא שדה.

6) משפט פרובניוס: אין אלגברות חילוק מ"מ מעל $\mathbb{R}$.

V תבורת ברואר

1) הגדרת תבורת $Br(K)$, $Br(L/K)$ כולל נימוקים מפורט הכל מוגדר

2) $Br(L/K)=\{x\in Br(K) \mid C_S(L)=L\}$, לכל S כך ש $[S]=x$, + מסקנה

3) משפט: לכל אלגברת חילוק קומוטטיבית D קיים איבר $x\in D-Z(D)$ שאינו ספרבילי מעל $Z(D)$ (לא בוכחה!)

4) מסקנה: קיום שדה פיצול גלואה (לא הוכחה!)

5) אם D_1, D_2 אלגברות חילוק מ"מ מעל K ו $(\dim_K D_1, \dim_K D_2)=1$ אזי $D_1\otimes_K D_2$ הינו אלגברה עם חילוק

6) לכל גוף מ"מ A מתקיים: $\exp(A)\mid \mathrm{ind}(A)$; (ב) אם $p\mid \mathrm{ind}(A)$ אזי $p\mid \exp(A)$

7) כל אלגברה מ"מ D מעל K עם $\deg(D)=p_1^{k_1}\cdots p_n^{k_n}$ ניתנת לפירוק יחיד $D=D_1\otimes\cdots\otimes D_n$ כאשר D_i אלגברה מ"מ מעל K ו $\deg(D_i)=p_i^{k_i}$

8) הגדרת אלגברות $S(L,\Gamma,\alpha)$.

9) לכל $x\in Br(L/K)$ יש נציג יחיד מהצורה $S(L,\Gamma,\alpha)$

VI חוגים פרימיטיביים ומשפט הצפיפות

1) משפט הצפיפות של מודולים פשוטים לחלוטין

2) חוג R הוא פרימיטיבי אם"ק הוא תת-חוג פשוט של $End_D(V)$

3) הוכחה שיש שכל חוג פשוט ארטיני איזומורפי ל- $Mat_n(D)$

VII הצגות של חבורות

1) הגדרות, דוגמאות: ρ_{reg} – הצגה רגולרית, χ_ρ – הצגה המתאימה לפעולה של G על קבוצה X.

2) משפט Maschke: $k[G]$ פשוטה למחצה אם G סופית ו $\mathrm{char}\, k \nmid |G|$

ומסקנות

3) מס' הצגות ρ-פרקטיות = מס' מחלקות צמידות

4) מס' אורטוגונליות של מקדמי מטריצות

5) מסקנות: (א) מס' אורטוגונליות של קרקטרים

(ב) כל הצגה נקבעת ע"י קרקטר

(ג) ρ ρ-פרקטית אמ"מ $\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = 1$

6) הגדרת תנאים שקולים של "$x \in B$ שלם מעל A".

7) לכל $\rho \in \mathrm{Irr}\, G$ $\dim \rho \mid |G|$

8) משפט $p^a q^b$ של Burnside

9) למעשה: הצגות מושרות: הגדרה, קיום, יחידות ותכונה אוניברסלית.

הערות: (א) יתכן ניסוח של השאלה מה קבוצת שונה מצו שבריתה או תכיל לכן אנחנו נסו להגיע ולאו למעשה בעל פה.

(ב) מבחן לפוגמא פורסם ב"מ הקרובים